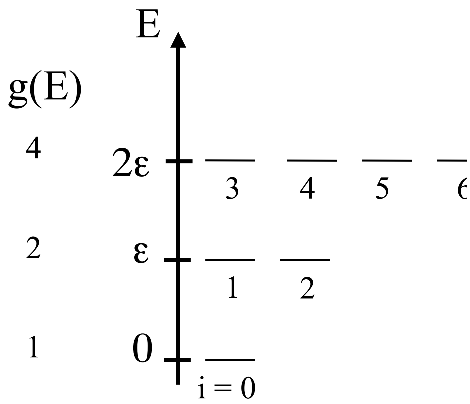
Termodinâmica 1/2016 Trabalho de Casa 8

Entrega até segunda, 18/06, às 18:00.

1. **(a)** Considere um átomo de hidrogênio à temperatura ambiente e estime a razão entre as probabilidades de encontrar este átomo no 1º estado excitado e no estado fundamental: P(E=1)/P(E=0). Não se esqueça que o níveis de energia do átomo de hidrogênio são degenerados. [Calcule o valor, não importa quão pequeno seja, em termos de potências de 10. "Zero" não é uma resposta aceitável.]

(b) Repita o cálculo, agora para um átomo de hidrogênio na atmosfera da estrela gama da constelação da Ursa Maior, cuja superfície está a uma temperatura de 9500K.

2. Imagine uma partícula em contato térmico com um reservatório à temperatura T. A partícula pode estar em qualquer um de apenas 3 níveis de energia, com energias 0, +ε, e +2ε. Estes níveis são degenerados, e suas degenerescências são g(0)=1, g(ε)=2, g(2 ε) = 4.



A) Calcule a função de partição para esta partícula.

B) Calcule a probabilidade de que esta partícula seja encontrada com cada uma destas 3 energias. Isto é, calcule 3 probabilidades: P(E=0), P(E=ε) , e P(E=2ε).

C) Use um programa de computador para fazer o gráfico destas 3 probabilidades vs. a temperatura adimensional kT/ ε. Mostre as 3 probabilidades no mesmo gráfico.

D) Calcule a energia média por partícula $\overline{E}$. Qual o limite de altas temperaturas desta energia média?

E) Use um programa de computador para plotar a energia média $\overline{E}$ vs temperatura, usando quantidades adimensionais $\overline{E}/\varepsilon$ vs. kT/ ε.

3. O desvio padrão é definido como $\sigma_E = \sqrt{\dfrac{\sum_i (E_i - \overline{E})^2}{N}}$. Mostre que isto é equivalente a $\sigma_E{}^2 = \overline{E^2} - \left(\overline{E}\right)^2$.

4. Considere um sistema em equilíbrio com um reservatório a temperatura T.

A) Prove que a energia média do sistema está relacionado com a função de partição pela expressão $\bar{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln Z$, onde $\beta = 1/kT$.

B) Prove que o valor médio de E^2 é dado por $\overline{E^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$.

C) Deduza uma fórmula para σ_E em termos da capacidade térmica $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}$. Você deve encontrar que $\sigma_E = kT\sqrt{\frac{C}{k}}$. Dica: É mais fácil supor que $\sigma_E = kT\sqrt{\frac{C}{k}}$ é verdadeiro, e a partir desta hipótese mostrar que isto é equivalente ao valor de σ_E que você obtém com o resultado do problema (3).

5. Considere um sistema de N osciladores harmônicos unidimensionais (1D), um sólido de Einstein, no limite de altas temperaturas, em equilíbrio com um reservatório a temperatura T.

A) De acordo com o teorema da equipartição, qual é a energia média deste sistema?

B) Use os resultados do problema (4) para deduzir uma fórmula para o desvio padrão da energia deste sistema.

C) Escreva uma expressão para a flutuação relativa na energia, $\sigma_E / \bar{E}$. Calcule esta fração para N =1, 10^3, e 10^{23}.

6. Considere um conjunto de N osciladores harmônicos unidimensionais (1D) idênticos a fracamente acoplados. (Um sólido de Einstein.) Cada oscilador tem níveis de energia não degenerados E = 0, ε, 2ε, 3ε .., onde ε = hf .

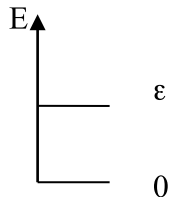
A) Qual a função de partição para um único oscilador harmônico 1D? Use que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ..$ para simplificar sua resposta tanto quanto possível.

B) Deduza uma expressão para a energia média de um único oscilador harmônico 1D a temperatura T. Simplifique sua resposta tanto quanto possível. Dica: Reveja o problema 4.

C) Qual a energia total de um sistema de N osciladores à temperatura T? Verifique sua resposta checando se o limite de altas temperaturas ($kT \gg \varepsilon$) coincide com a previsão do teorema da equipartição. [Dica: Relembre a expansão em série de Taylor de e^x quando $x \ll 1$.]

D) Calcule a capacidade térmica do sistema com N osciladores. Faça um gráfico da capacidade térmica (usando quantidade adimensional adequada) vs. temperatura (expressa também de forma adimensional).

7. Uma partícula de spin 1/2 num campo magnético é um exemplo de um "sistema de 2 níveis", um sistema com um estado fundamental e um único estado excitado (ambos não degenerados). Vamos escolher o valor zero para a energia do estado fundamental (a convenção usual) e assim a energia do primeiro estado excitado é ε.



(A) Escreva a função de partição deste sistema.

(B) Encontre a energia média deste sistema à temperatura T.

(C) Encontre a capacidade térmica do sistema C como função da temperatura.

(D) Represente num mesmo par de eixos os gráficos da energia média (adimensional, E/ε) e da capacidade térmica (C/k) vs temperatura kT/ε.

8. (A) Faça um gráfico da distribuição de velocidades de Maxwell para moléculas de nitrogênio a T = 300K e T = 600K. Use os mesmos eixos para ambos.

(B) A 300K, qual a fração de moléculas de nitrogênio do ar que se movem com velocidades menores que 300 m/s?

(C) A velocidade de escape da Terra é 11 km/s. Moléculas da alta atmosfera que se movam mais rápido que isso vão escapar se não sofrerem colisão que altere sua trajetória de saída. A temperatura da alta atmosfera terrestre é surpreendentemente alta, cerca de 1000 K. Calcule a probabilidade de que uma molécula de N_2 a esta temperatura se mova com velocidade maior que 11 km/s e comente seu resultado.

(D) Repita este cálculo para uma molécula de H_2 e comente seu resultado. Ele pode explicar porque não há um número significativo de moléculas de hidrogênio na atmosfera terrestre?

Problema	Pontos
1	2
2	4
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	4
Total	**20**